WISKUNDE 3
Natuurkunde en Sterrenkunde
Tentamen
Woensdag 23 juni 1999, 09.00–12.00 uur, ZG 15
Open boek

Voor elke opgave is maximaal 1 punt te behalen. Een punt is gratis voor papier en moeite. De vragen met een * zijn ietsje moeilijker.

Gelieve uw tentamenbriefje **helemaal** in te vullen, met uitzondering van alleen het cijfer en de handtekening. Het tentamen zal op **6 juli** nagekeken zijn.

1. Stel $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, A symmetrisch. Stel dat $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, en $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ eigenvectoren zijn van A.

   (a) (0.5 punten) Geef een vector die orthogonaal (met betrekking tot het standaard in-product in $\mathbb{R}^4$) staat op deze drie.

   (b) (0.5 punten) Bewijs dat deze vector een eigenvector is van A, onder de veronderstelling dat alle eigenwaarden van A distinkt zijn.

2. Stel dat M een lineaire transformatie is, $M : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, met $\mathbb{E}$ een complexe 5-dimensionale Euclidische ruimte. Stel dat de complexe getallen $1, -1, i, -i, 2$ eigenwaarden zijn van M.

   (a) (0.1 punten) Zijn er nog andere eigenwaarden? Verklaar.

   (b) (0.3 punten) Kan M Hermitisch zijn? Verklaar.

   (c) (0.3 punten) Kan M scheef-Hermitisch zijn? Verklaar.

   (d) (0.3 punten) Kan M unitair zijn? Verklaar.

3. Beschouw de volgende verzamelingen:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \\ S_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1, z = 0\} \end{aligned}$$

   (a) (0.5 punten) Is S_1 open? Gesloten? Verklaar.

   (b) * (0.5 punten) Is S_2 open? Gesloten? Verklaar.

4. Beschouw $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ en $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeven door

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= (xy, x^2, y^2) \\ f_2(x, y, z) &= (x + y - z, z) \end{aligned}$$

   (a) (0.3 punten) Bepaal $Df_1(1,1)$.

   (b) (0.3 punten) Bepaal $Df_2(1,1,1)$.

   (c) (0.2 punten) Bepaal $D(f_1 \circ f_2)(1,1,1)$.

   (d) (0.2 punten) Bepaal $D(f_2 \circ f_1)(1,1)$.

5. Beschouw de golfvergelijking

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f$$

   met de beginvoorwaarden

$$f(x,0) = x \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} f(x,0) = 0$$

   (a) (0.7 punten) Bewijs dat de afbeelding $(x,t) \mapsto x$ een oplossing is.

   (b) * (0.3 punten) Bewijs dat dit de eenduidige (="unique") oplossing is.

6. Stel $f = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x, y, z) = x^2 + 2xy + y^2 + \beta \cos(z)$$

   (a) (0.6 punten) Stel $\beta = 1$. Is $(0,0,0)$ een stationair punt? Een lokaal minimum? Een lokaal maximum? Een zadelpunt? Verklaar.

   (b) (0.2 punten) Bepaal voor alle $\beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$, of $(0,0,0)$ een lokaal minimum, een lokaal maximum, of een zadelpunt is.

   (c) *(0.2 punten) Zelfde vraag met $\beta = 0$.

7. Stel $0 < I_1 < I_2 < I_3$. Beschouw $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x, y, z) = I_1 x^2 + I_2 y^2 + I_3 z^2.$$

   (a) (0.7 punten) Gebruik Lagrange multiplicatoren om te bewijzen dat $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, en $(0,0,1)$ de potentiële lokale extrema zijn van f onder de nevenvoorwaarde

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

   (b) * (0.3 punten) Bepaal voor ieder van deze punten of het een lokaal maximum, lokaal minimum, of een zadelpunt is van f onder de gegeven nevenvoorwaarde.

8. Welke van de volgende verzamelingen is een begrensde verzameling met inhoud ('content') gelijk aan nul?

   (a) (0.3 punten) $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Verklaar.

   (b) (0.3 punten) $S_3 = \{x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Verklaar.

   (c) * (0.4 punten) $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$. Verklaar.

9. Beschouw $\iint\limits_S f$, de integraal van $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^3,$$

over

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$$

   (a) (0.5 punten) Verklaar, zonder de integraal uit te rekenen, waarom f integreerbaar is over S.

   (b) (0.5 punten) Bereken $\iint\limits_S f$.